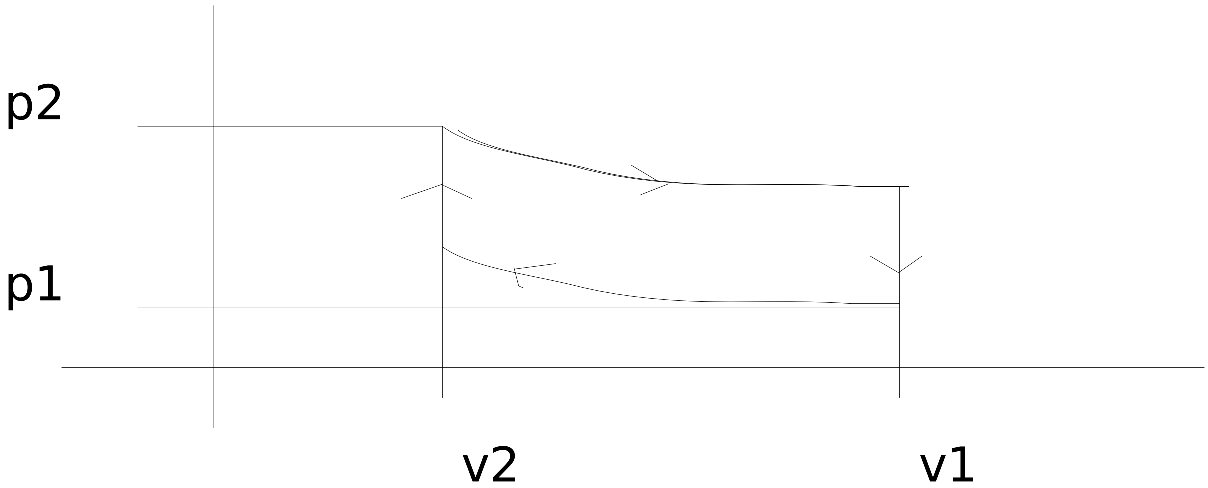
Monologue sur un Stirling

toutes les variations de volume se font par échange thermique
le cycle idéal d'un moteur Stirling considère qu'il y a variation de pression pour un volume constant ce qui donne



donc d'un point de vue mathématique

$$p \cdot v = n \cdot r \cdot t$$

$$\Delta p = \int \left(\frac{(n \cdot r \cdot t)}{v}\right) \cdot dv$$

$$\Delta p = w$$

$$\Delta p = w = (n \cdot r \cdot t) \int \left(\frac{1}{v}\right) \cdot dv = n \cdot r \cdot t \cdot \ln\left(\frac{v1}{v2}\right)$$ dans l'autre sens $$\Delta p = n \cdot r \cdot t \cdot \ln\left(\frac{v2}{v1}\right)$$

la somme des 2

$$n \cdot r \cdot tc \cdot \ln\left(\frac{v1}{v2}\right) + n \cdot r \cdot tf \cdot \ln\left(\frac{v2}{v1}\right)$$

mais

$$+ n \cdot r \cdot tf \cdot \ln\left(\frac{v2}{v1}\right) = - n \cdot r \cdot tf \cdot \ln\left(\frac{v1}{v2}\right)$$

$$n \cdot r \cdot tc \cdot \ln\left(\frac{v1}{v2}\right) - n \cdot r \cdot tf \cdot \ln\left(\frac{v1}{v2}\right) = n \cdot r \cdot \ln\left(\frac{v1}{v2}\right) \cdot (tc - tf)$$

donc pour le rendement

$$\frac{travail}{consommation} \quad \frac{(n \cdot r \cdot \ln(\frac{v1}{v2}) \cdot (tc-tf))}{(n \cdot r \cdot tc \cdot \ln(\frac{v1}{v2}))} \quad 1-\frac{(n \cdot r \cdot \ln(\frac{v1}{v2}) \cdot tf)}{(n \cdot r \cdot \ln(\frac{v1}{v2}) \cdot tc)} \quad 1-\frac{tf}{tc}$$

mais cette approche que l'on retrouve partout est basée sur un modèle dit idéal
pour essayer de se rapprocher le plus possible de la réalité
je vais aborder la problématique sous l'angle de la cinématique

$$Ec=(\frac{1}{2}) \cdot m \cdot v^2$$

qui pour les gaz me donnent dixit wikipédia
http://fr.wikipedia.org/wiki/Th%C3%A9orie_cin%C3%A9tique_des_gaz

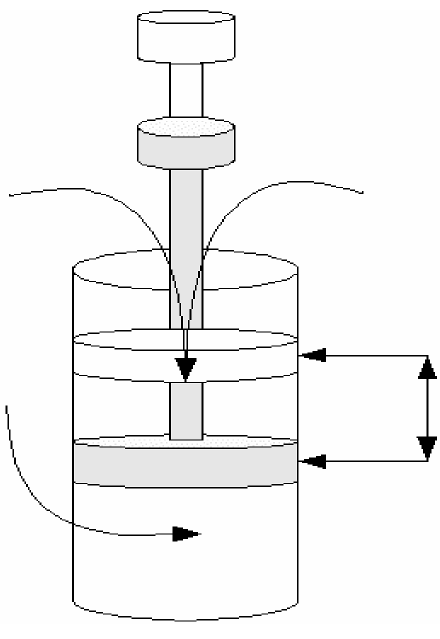
$$Ec=(\frac{1}{2}) \cdot m \cdot v^2=(\frac{3}{2}) \cdot p \cdot v \quad \text{avec} \quad p \cdot v=n \cdot r \cdot t$$

cela donne donc bien une variation d'énergie cinétique , en fonction de la température

$$Ec=(\frac{3}{2}) \cdot n \cdot r \cdot t$$

cette approche permet d'appréhender le système en dynamique

la pression exercée à l'extérieur du système est constante (masse du piston + pression atmosphérique)



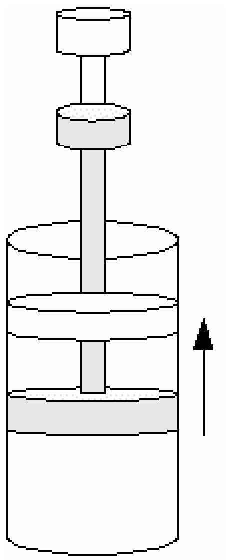
qui est identique à la pression intérieure donc dans le cas où le piston bouge la pression extérieure qui est constante est toujours égale à la pression intérieure donc la différence d'énergie cinétique ou de température est directement convertie en différence de volume, la masse sur l'axe du piston peut être vue comme la force nécessaire pour faire tourner une génératrice ou dynamo

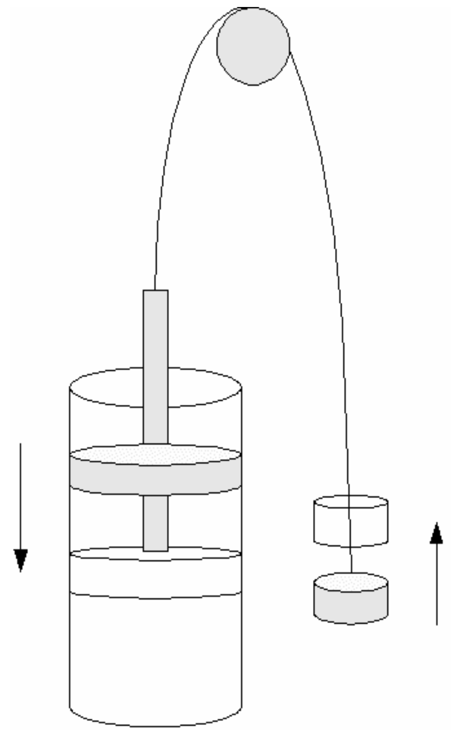
la force générée par le dispositif est égale à la différence de hauteur multipliée par la masse puisque le système est considéré comme étanche donc à l'arrivée kif kif

pour faire sérieux l'on peut dire que toute augmentation de l'énergie entropique du gaz est convertie en différence de volume

donc $Ec=(\frac{3}{2}) \cdot n \cdot r \cdot t$ ou $p \cdot v=n \cdot r \cdot t$ kif kif puisque la pression , en réalité est constante à l'intérieur comme celle exercée à l'extérieur

à l 'arrivée dans un moteur Stirling il y a une augmentation de la température dans le piston puis une diminution de la température





comment calculer ?
surface du piston 0.1 m^2
température de remplissage 20 degrés
hauteur du volume mort 0.1 m
volume 0.1*0.1

pression atmosphérique 1 bar =10^5 Pascal
force du moteur nécessaire ou souhaitée 100 Newton

$$p=\frac{f}{s}=\frac{1000}{0.1}=1000\,Pascal$$

pression à l'intérieur 101000 pascal= atm + force du moteur
supposons que le diamètre de la bielle soit égal à n.h avec
 h hauteur du volume mort cela implique
qu'au minimum sans prendre en considération les pertes
il faut que je puisse multiplier par n la température de remplissage au repos
puisque l'on a vu que $p \cdot v = n \cdot r \cdot t$ et que p est une constante donc si je double
la température je double le volume pour un gaz parfait bien sûr
sinon utiliser les Équations de Van der Walls en gros l'écart de pression est proportionnel au carré du nombre de molécules par unité de masse
allez zou négligeable unité de masse trop faible non mais

$\Delta t = \Delta h = \Phi \; de \;\; l'arbre \;\; moteur$ avec h hauteur du volume mort

monologue sur les volumes morts

un volume mort c'est le volume qui reste quand le piston est en butée côté culasse
le rendement théorique du cycle de Stirling à la sauce Carnot vu du côté de la température

$\eta = 1 - \frac{Tf}{Tc}$ avec Tf température froide Tc température chaude

donc le but du jeu $\frac{Tf}{Tc}$ doit être le plus petit possible
mais l'on a vu plus haut que $Tc = n \cdot Tf$ avec $\frac{(n \cdot h)}{2} = r$ $n = \frac{2 \cdot r}{h}$
avec h hauteur du volume mort dans le piston et r rayon de l'arbre du moteur

$$\eta = 1 - \frac{Tf}{Tc} = 1 - \frac{Tf}{(n \cdot Tf)} = 1 - \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{(\frac{2 \cdot r}{h})} = 1 - \frac{h}{(2 \cdot r)}$$

conclusion plus le volume mort est petit plus le rendement est grand
ou plus l'écart de température est grand plus le rendement augmente
puisque r est proportionnel à la différence de température

donc pour faire simple

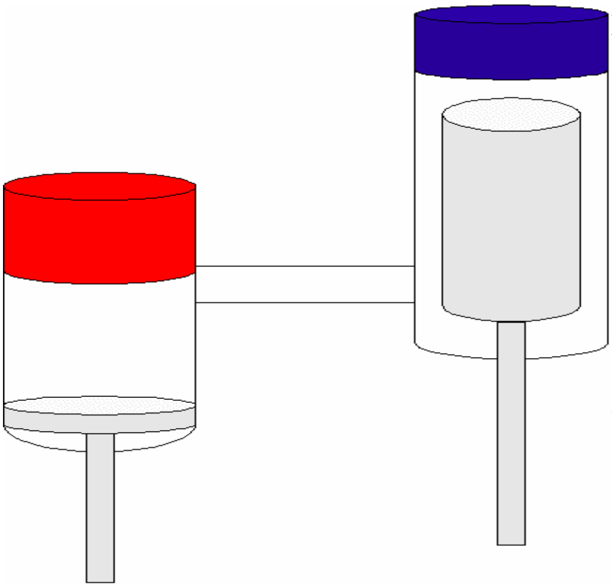
$\eta = 1 - \frac{1}{n}$ avec n de $Tc = n \cdot Tf$ Tc température chaude ,Tf température froide

dimension du moteur $\frac{(n \cdot h)}{2} = r$ r rayon de l'arbre, h hauteur du volume mort

ou si j'ai un faible écart de température il vaudra mieux avoir pas mal de volume mort
par exemple le moteur Stirling qui fonctionne avec la différence de température d'une main

compréhension du moteur Stirling

parce que c'est bien beau tout cela dans un moteur Stirling les gaz ils passent d'un côté à l'autre

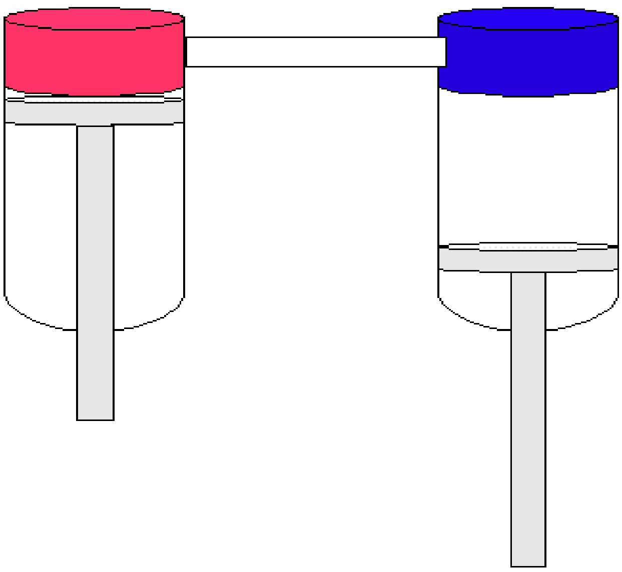


pour faire simple l'on a un piston moteur et un déplaceur

le déplaceur peut être vu comme une masse dans une enceinte close que l'on déplace pour faire varier la température de l'ensemble du système

en gros si la masse est du côté froid la température moyenne augmente
(+ de gaz chaud) si la masse est du côté chaud la température moyenne diminue
(+ de gaz cote froid)
la liaison entre les 2 tubes s'est le régénérateur

Vt =volume total ,V1 volume du régénérateur+déplaceur , Δv volume du piston moteur
donc l'on a $Vt=v1+\Delta v$ ce qui donne une sinusoïdale décalée $v1$



et dans cette configuration l'on a
le volume global qui est constant
si il y un déphasage de 180 degrés

si je regarde la problématique du côté de la cinématique $Ec=(\frac{3}{2})\cdot n\cdot r\cdot t$

les 2 systèmes sont étanches donc un même écart de température engendre la même différence de pression avec la même quantité d'air la différence doit peut être
être du côté de la qualité des échangeurs
en gros et pour faire simple le premier se comporte comme le deuxième mais avec un énorme régénérateur avec l' inertie thermique

$t=\frac{(p\cdot v1)}{(n\cdot r)}$ et $p=\frac{f}{s}$ en gros le décalage de la sinusoïdale

donc si j'ai un grand écart de température je préférerai le premier
sinon le deuxième pour avoir une réduction de la latence thermique

donc faible écart de température grand volume mort très peu de régénérateur
grand écart de température peu de volume mort un bon régénérateur pour récupérer un max d'énergie

maintenant si l'on se place du côté de l'apport énergétique il est bien évident que la latence thermique liée au volume mort ou à la configuration vont greffer les performances énergétiques de l'ensemble

en gros il faudra plus d'énergie pour faire bouger l'ensemble si + de volume mort

pour calculer la puissance de manière a peu prêt juste

je pars de formule de l'énergie cinétique ou l' énergie interne d'un gaz parfait

$$Ec=(\frac{3}{2})\cdot n\cdot r\cdot t \quad Puissance=\frac{(\Delta E)}{(\Delta t)} \quad \frac{((\frac{3}{2})\cdot n\cdot r\cdot(T1-T2))}{(t2-t1)}$$

ce qui donne une variation de température T1 ->T2 pendant (pour faire simple) 1 seconde t2-t1

$\frac{Joule}{seconde}=a\,des\,watts$ avec n nombre de molles et T1 T2 température à l' intérieur du moteur

les 2 températures sont prises avec un écart de 1 seconde ce qui donne $(\frac{3}{2})\cdot n\cdot r\cdot(T1-T2)$

et là on arrête toutes ces conneries parce que les variations de température en régime établi pendant une seconde sont directement liées à la configuration du moteur en gros échange thermique cylindre déplaceur cylindre moteur

en gros $\vec{F}=F\cdot\cos(\omega t)$ avec $\cos(\omega t)$ fréquence de rotation ou vitesse du moteur
et F force du moteur nécessaire pour le faire tourner

pratiquement incalculable donc pour faire simple la puissance est liée au nombre de molles (quantité de matières) et la vitesse est liée aux échanges thermiques du dispositif

le tout bien sûr pour un delta t constant une autre approche Mathématique peut être

$$dU=\frac{3}{2}\cdot n\cdot R\cdot dT \quad p\cdot v=n\cdot r\cdot t \quad t=\frac{(p\cdot v)}{(n\cdot r)} \quad dT=\frac{1}{(n\cdot r)}\cdot d(p\cdot v)$$

$$dU=\frac{3}{2}(p\cdot dv+v\cdot dp)$$

si p est une constante $dU=\frac{3}{2}\cdot p\cdot dv \quad dU=\frac{3}{2}\cdot p\cdot(v1-v2)$

si v est une constante $dU=\frac{3}{2}\cdot v\cdot dp \quad dU=\frac{3}{2}\cdot p\cdot(p1-p2)$

comme première approximation cela peut le faire avec delta u qui donne des joules, et des joules pendant une seconde cela donnent des watts
donc les variations se font sur une seconde

on mesure la vitesse de rotation puis on fait l'hypothèse que la pression est une constante
et avec la vitesse on calcule la variation de volume pour une seconde

100 Tours/minute donne $(\frac{100\cdot 360}{60})$ = nb de degrés pour une seconde

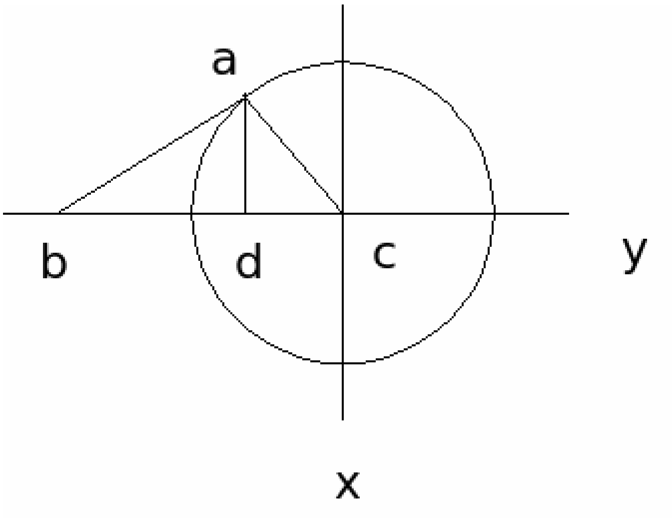
$Fb(\theta)=r\times\sin(\theta)+\frac{(l\times\lambda)}{2}\times(-1+\cos(\theta))$ pour plus de détail voir (Bielle-Piston)

puis on calcule la variation de volume que l'on met dans

$$dU=\frac{3}{2}\cdot p\cdot dv \quad dU=\frac{3}{2}\cdot p\cdot(v1-v2)$$

et là çà y est enfin on a une estimation de la puissance en watt du moteur

Bielle-Piston



le but du jeu consiste à calculer le déplacement du point b sur l'axe y
donc révision de la trigo
adj =adjacent , hyp=hypoténuse , opp=opposé
ce qui donne

$$\sin(a)=\frac{opp}{hyp} \quad \cos(a)=\frac{adj}{hyp}$$

maintenant on a ac= rayon du cercle, ab=longueur de la bielle

$$bc=cd+bd \quad cd=\sin(a)\times r$$

calcul de l'angle BAD a'

$$ad=\cos(a)\times r \quad \cos(a')=\frac{ad}{ba} \quad a'=arcos(\cos(a')) \quad a'=arcos(\frac{ad}{ba})$$

$$a' = arcos(\frac{(\cos(a) \times r)}{bielle})$$

calcul de bd

$$\sin(a') = \frac{bd}{ab} \qquad bd = \sin(a') \times ab$$

donc maintenant bd+dc avec l= longueur de la bielle et r rayon du cercle

$$Fb(\theta) = r \times \sin(\theta) + l \times \sin(arcos(\frac{r \times (\cos(\theta))}{l}))$$

mais

$$\sin(arcos(x)) = \sqrt{1 - x^2}$$

donc

$$Fb(\theta) = r \times \sin(\theta) + l \times \sqrt{(1 - (r \times \cos\frac{(\theta)}{l}))^2}$$

avec

$$\lambda = \frac{r}{l}$$

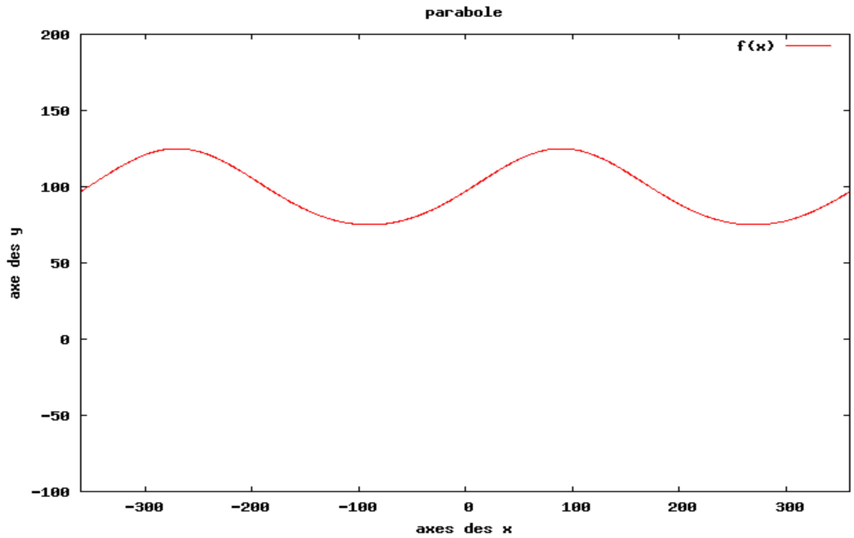
$$Fb(\theta) = r \times \sin(\theta) + l \times \sqrt{(1 - (\lambda * \cos(\theta))^2)}$$

développement en série

$$\sqrt{(1 - x^2)} = 1 + \frac{1}{2} X - ....$$ je néglige le reste

$$Fb(\theta) = r \times \sin(\theta) + l \times (1 + \frac{\lambda}{2} * \cos(\theta))$$

cette approche est juste, mais il y a comme un problème
quand l'angle est à 0 degré ou 180 degrés Fb(0) n'est pas égal à zéro
comme l'on peut le voir



donc pour faire un calcul avec les volumes c'est comme qui dirait gênant

alors

$$Fb(\theta)=(Fb(\theta)-Fb(0))$$

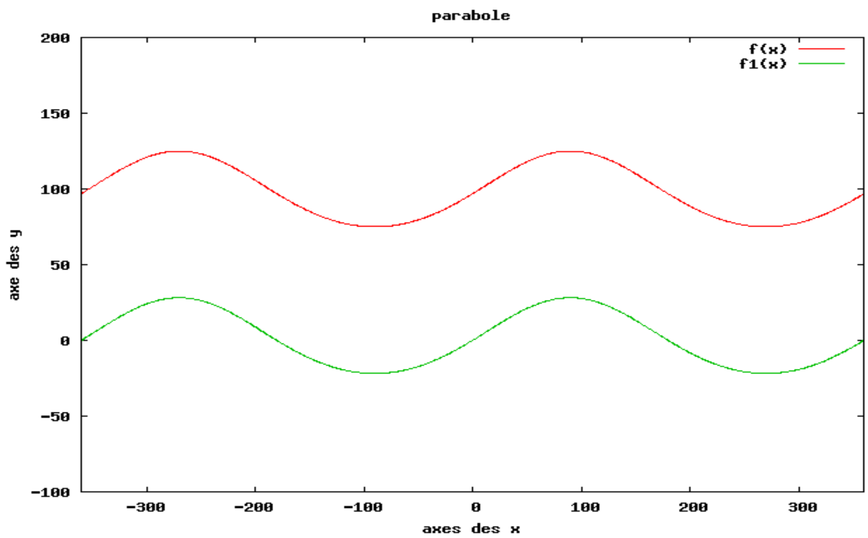
$$Fb(\theta)=(r\times\sin(\theta)+l\times(1+\frac{\lambda}{2}*\cos(\theta)))-(r\times\sin(0)+l\times(1+\frac{\lambda}{2}*\cos(0)))$$

$$\sin(0)=0 \quad \cos(0)=1$$

$$Fb(\theta)=(r\times\sin(\theta)+l\times(1+\frac{\lambda}{2}*\cos(\theta)))-(l+\frac{l\times\lambda}{2})$$

$$Fb(\theta)=r\times\sin(\theta)+\frac{(l\times\lambda)}{2}\times(-1+\cos(\theta))$$

qui nous donne la courbe en vert



maintenant on peut calculer avec des volumes et la section s qui est égale à la surface du piston et au passage pour vérifier histoire que l'on a bien le rayon de l'arbre

$$(\frac{(Fb(90)-Fb(270))}{2})=r$$

donc pour faire simple quand y est positif le piston avance, quand y est négatif le piston recule

avec mes remerciements à Régis pour ses piqûres de physique et à Evelyne pour sa relecture

remy