Proposition de démonstration

de la conjecture de Syracuse

par Rémy Aumeunier

La conjecture de Syracuse, également connue sous le nom de problème de Collatz, a été formulée par le mathématicien allemand Lothar Collatz en 1937. Elle stipule que pour tout entier positif n, la séquence U_n atteint finalement la valeur 1, en suivant les règles simples suivantes :

$$U_0 \in \mathbb{N}^* \quad U_{n+1} = \begin{cases} \frac{U_n}{2} & \text{si } U_n \text{ est un entier pair} \\ 3U_n + 1 & \text{si } U_n \text{ est un entier impair} \end{cases}$$

1 Préambule

Cette méthode proposée, implique de transformer la séquence U_n en une forme polynomiale. L'analyse de la polynomisation de la séquence de Syracuse offre une approche non conventionnelle pour examiner de manière approfondie le comportement de ces séquences. À travers cette perspective, je vise à fournir des éclaircissements qui pourraient apporter des éléments de réponse à la conjecture ou à aborder ce problème d'une manière inattendue.

2 Polynomisation de la séquence de Syracuse

Pour effectuer la polynomisation des éléments de la suite de Syracuse, j'utilise une variante de la méthode de Horner connue sous le nom de Ruffini-Horner. Cette méthode permet d'associer une valeur à une représentation polynomiale.

$$U_0 \in \mathbb{N}^* \quad U_{n+1} = \begin{cases} \frac{U_n}{2} & \text{si } U_n \text{ est un entier pair} \\ 3U_n + 1 & \text{si } U_n \text{ est un entier impair} \end{cases}$$

$$\{q_x, p_x\} \in \mathbb{N} \quad u_0 \frac{3^p}{2^{q_0}} + \frac{3^{p-1}}{2^{q_1}} + \frac{3^{p-2}}{2^{q_2}} + \frac{3^{p-3}}{2^{q_3}} + \frac{3^{p-4}}{2^{q_4}} + \cdots + \frac{3^{p_0}}{2^{q_n}} = u_n$$

Et si je considère la suite de Syracuse compressée

$$U_0 \in \mathbb{N}^* \quad U_{n+1} = \begin{cases} \frac{U_n}{2} & \text{si } U_n \text{ est un entier pair} \\ \frac{3U_n+1}{2} & \text{si } U_n \text{ est un entier impair} \end{cases}$$

Après arrangement, j'obtiens une forme que je vais qualifier de compressée. Pusiqu'une multiplication par 3 implique obligatoirement une division par 2.

$$u_0 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^p \cdot \frac{1}{2^{q_0}} + \left(\frac{3}{2}\right)^{p-1} \cdot \frac{1}{2^{q_1}} + \left(\frac{3}{2}\right)^{p-2} \cdot \frac{1}{2^{q_2}} + \left(\frac{3}{2}\right)^{p-3} \cdot \frac{1}{2^{q_3}} + ... + \left(\frac{3}{2}\right)^{p-n} \cdot \frac{1}{2^{q_p}} = u_n$$

Ainsi, chaque valeur de la séquence peut être associée à une transposition distincte . Cette transposition suit systématiquement une structure commune, imposée par la méthode Syracuse. Ici, p désigne le nombre de multiplications par 3 , tandis que la plus grande puissance de 2 reflète le nombre de divisions par 2 effectuées.

2.1 Application numérique

La polynomisation de la séquence de Syracuse est une simple transposition des valeurs.

$$U_0 \in \mathbb{N}^* \quad U_{n+1} = \begin{cases} \frac{U_n}{2} & \text{si } U_n \text{ est un entier pair} \\ 3U_n + 1 & \text{si } U_n \text{ est un entier impair} \end{cases}$$

$$U_{15} = \{46, 23, 70, 35, 106, 53, 160, 80, 40, 20, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1\}$$

J'écris toutes les valeurs intermédiaires sous forme de fraction.

$$\frac{\left(\frac{\left(\frac{\left(\frac{\left(\frac{15\cdot3+1}{2}\right)\cdot3+1}{2}\right)\cdot3+1}{2}\right)\cdot3+1}{2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2}\right)\cdot3+1}{2\cdot2\cdot2\cdot2}$$

Que je réarrange ensuite sous forme de pseudo-polynôme.

$$\left(...\right) + \frac{1}{2^4}$$

$$\left(...\right) + \frac{3}{2^9} + \frac{1}{2^4}$$

$$\left(...\right) + \frac{3^2}{2^{10}} + \frac{3}{2^9} + \frac{1}{2^4}$$

$$\cdots$$

$$15\frac{3^5}{2^{12}} + \frac{3^4}{2^{12}} + \frac{3^3}{2^{11}} + \frac{3^2}{2^{10}} + \frac{3^1}{2^9} + \frac{3^0}{2^4}$$

3 Proposition de démonstration

Dans cette proposition de démonstration de la conjecture de Syracuse, je vais considérer les valeurs intermédiaires, en utilisant leur représentation sous forme de pseudo-polynômes, basée sur la forme compressée de Syracuse, puis analyser le comportement de q_0.

$$u_0 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^p \cdot \frac{1}{2^{q_0}} + \left(\frac{3}{2}\right)^{p-1} \cdot \frac{1}{2^{q_1}} + \left(\frac{3}{2}\right)^{p-2} \cdot \frac{1}{2^{q_2}} + ... + \left(\frac{3}{2}\right)^{p-n} \cdot \frac{1}{2^{q_p}} = u_n$$

u_n représente la n-ème valeur de la séquence de Syracuse, avec u_0 le premier élément de la suite. La variable p dénombre les valeurs impaires rencontrées au cours des itérations, tandis que q_0 correspond au nombre de divisions par 2 surnuméraires liées aux entiers pairs de la forme $(k \cdot 2^{n>1})$. C'est précisément l'évolution de q_0, qui est monotone croissante parce qu'il comptabilise les divisions par 2 surnuméraires, qui démontre la convergence inéluctable de la suite vers 1. En effet, la limite de q_0 nous permet d'établir une relation d'ordre ,et d'avoir $u_0 \cdot \frac{3^p}{2^{p+q_0}} \approx 0$ se qui fait converger la suite vers 1.Parce que la transposition ne peut génère que des entiers $\in \mathbb{N}^*$ ou $\{u_n \mid u_{n+1} = f(u_n),\, u_n \in \mathbb{N}^*,\, n \in \mathbb{N}\}$

$$\lfloor \frac{u_0 \cdot 3^p}{2^{p+q_0}} \rfloor + \lfloor \frac{3^{p-1} + \cdots + 3^{p_0} \cdot 2^{b_n}}{2^{p+q_0}} \rfloor + (u_0 \cdot 3^p + 3^{p-1} + \ldots 2^{b_n}) mod(2^{p+q_0})$$

$$0 + 0 + \frac{u_0 \cdot 3^p + 3^{p-1} + \cdots + 3^{p_0} \cdot 2^{b_n}}{2^{p+q_0}} = \frac{2^{p+q_0}}{2^{p+q_0}} = 1$$

3.1 Application numérique :

Avec en gras, les divisions que j'ai qualifiées de surnuméraires.

$u_n = \{23 - 70 - 35 - 106 - 53 - 160 - \mathbf{80\ \text{-}\ 40\ \text{-}\ 20\ \text{-}\ 10} - 5 - 16 - \mathbf{8\ \text{-}\ 4\ \text{-}\ 2} - 1\}$

$$\frac{23 \cdot 3 + 1}{2} = 35$$

$$34.5 + 0.5 = 35 \quad , \quad \frac{3}{2} = 1.5$$

$$\frac{23 \cdot 3^2}{2^2} + \frac{3}{2^2} + \frac{1}{2} = 53$$

$$51.75 + 1.25 = 53 \quad , \quad \left(\frac{3}{2}\right)^2 = 2.25$$

$$\left(\frac{23 \cdot 3^3}{2^3} + \frac{3^2}{2^3} + \frac{3}{2^2} + \frac{1}{2}\right) \div 2^4 = 5$$

$$\frac{23\cdot 3^3}{2^3}\cdot\frac{1}{2^4}+\frac{3^2}{2^3}\cdot\frac{1}{2^4}+\frac{3}{2^2}\cdot\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2^4}=5$$

$$4.8515625+0.1484375=5 \quad , \quad \left(\frac{3}{2}\right)^3\cdot\frac{1}{2^4}=0.2109375$$

$$\left(\frac{23\cdot 3^4}{2^4}\cdot\frac{1}{2^4}+\frac{3^3}{2^3}\cdot\frac{1}{2^5}+\frac{3^2}{2^2}\cdot\frac{1}{2^5}+\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2^5}+\frac{1}{2}\right)\div 2^3=1$$

$$\frac{23\cdot 3^4}{2^4}\cdot\frac{1}{2^7}+\frac{3^3}{2^3}\cdot\frac{1}{2^8}+\frac{3^2}{2^2}\cdot\frac{1}{2^8}+\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2^8}+\frac{1}{2^4}=1$$

$$0.90966796875+0.09033203125=1 \quad , \quad \left(\frac{3}{2}\right)^4\cdot\frac{1}{2^7}=0.03955078125$$

Ici, le coefficient $\frac{1}{2^{q_0}}=\frac{1}{2^7}$ est dû au fait qu'il y a 7 divisions surnuméraires, associées aux valeurs $\mathbf{\{80,\ 40,\ 20,\ 10,\ 8,\ 4,\ 2\}}$. Les autres coefficients $\left\{\frac{1}{q^1}\cdots\frac{1}{q^n}\right\}$ jouent un rôle mineur dans la convergence de la suite vers 1, en raison de leurs coefficients multiplicateurs différents de u_0, et ne représentent pas nécessairement la quantité de divisions par 2, comme le montre l'exemple numérique.

3.2 Fréquence des entiers de la forme $k\cdot 2^{n>1}$

Ce qui suit est une proposition qui permet de justifier la présence d'entiers de la forme $\{k\cdot 2^n \mid k\in\mathbb{N}^*,\, n\in\mathbb{N},\, n>1\}$. Pour cela, considérons une suite de Syracuse.

$$U_n=\{31,\mathbf{94},47,\mathbf{142},71,\mathbf{214},107,\mathbf{322},161,\mathbf{484},242,121\}$$

Ensuite, calculons les coefficients multiplicateurs des entiers pairs et analysons la fréquence d'apparition des nombres premiers.

$$\{94=2\cdot 47 \quad 142=2\cdot 71 \quad 214=2\cdot 107 \quad 322=2\cdot 7\cdot 23 \quad 484=2^2\cdot 11 \quad ...\}$$

$$142/94=1.5106... \quad , \quad 214/142=1.5070... \quad , \quad 322/214=1.5045...$$

Ces coefficients n'étant pas des entiers, ils ne permettent pas de réutiliser les grands nombres premiers, dans la décomposition des éléments suivant de la suite de Syracuse.

$$(2\times 107)\times 1.5\cdots=u_n \quad u_n\in\mathbb{Z}\setminus 107\mathbb{Z} \quad \text{avec} \quad u_n\equiv 0 \pmod 2$$

De plus, en considérant une paire impair/pair, ces deux entiers sont premiers entre eux, $u_{n+1}=u_n\cdot 3+1$. Cela implique que l'on ne peut pas utiliser 3 comme nombre premier dans la décomposition de u_n pair, ce qui rend les entiers de la forme $k\cdot 2^{n>1}$, obligatoires et fréquents au voisinage d'un élément pair de la suite de Syracuse. En moyenne, tous les 3 nombres pairs, parce que $(\approx 1.5)^3 = 3.\cdots$ Concrètement, au vu de la progression arithmétique, ≈ 1.5 et du fait de ne pas pouvoir utiliser 3 et les plus grands nombres premiers déjà sortis, cela me permet de justifier la présence de puissances sur les petits nombres premiers, et donc des entiers de la forme $k \cdot 2^{n>1}$.

3.3 Unicité du Cycle

Dans cette proposition de démonstration de l'unicité du cycle $\{4, 1, 4, 1, \cdots\}$, je propose de considérer un cycle et d'analyser la transposition polynomiale du cycle en calculant plusieurs occurrences de même valeur $U_a = U_{a+xn}$

$$U_a = \{2U_1, 2^2U_2, 2U_{a+n}, 2U_1, 2^2U_2, 2U_{a+2n}, 2U_1, 2^2U_2, 2U_{a+3n}, \cdots\}$$

$$U_a\frac{3}{2} + \frac{1}{2} = U_1 \quad U_a\frac{3^2}{2^3} + \frac{3}{2^3} + \frac{1}{2^2} = U_2 \quad U_a\frac{3^3}{2^4} + \frac{3^2}{2^4} + \frac{3}{2^3} + \frac{1}{2} = U_{a+n}$$

$$\frac{3^3}{2^4}\left(U_a\frac{3^3}{2^4} + \frac{3^2}{2^4} + \frac{3}{2^3} + \frac{1}{2}\right) + \frac{3^2}{2^4} + \frac{3}{2^3} + \frac{1}{2} = U_{a+2n}$$

$$\left(\frac{3^3}{2^4}\right)^2\left(U_a\frac{3^3}{2^4} + \frac{3^2}{2^4} + \frac{3}{2^3} + \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{3^3}{2^4}\right)^1\left(\frac{3^2}{2^4} + \frac{3}{2^3} + \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{3^3}{2^4}\right)^0\left(\frac{3^2}{2^4} + \frac{3}{2^3} + \frac{1}{2}\right) = U_{a+3n}$$

$$k = \frac{3^3}{2^4} \quad , \quad U_a \cdot k^{n+1} + \sum_{i=0}^{n\neq\infty} k^i \left(\frac{3^2}{2^4} + \frac{3}{2^3} + \frac{1}{2}\right) = U_{a+xn}$$

Si $k > 1$ il ne peut pas exister de cycle parce que $U_a \cdot k^{n+1} > U_{a+xn}$, pour $0 < k < 1$.

$$U_a \cdot k^{n+1} \searrow \quad , \quad \frac{(\cdots)}{2^{\cdots}} \sum_{i=0}^{n\neq\infty} k^i \quad , \quad (\cdots)\, mod(2, 3) \neq 0$$

Cette polynomisation du cycle, permet une mise en facteur d'une constante, avec un numérateur qui n'est pas divisible par 2 et 3, ce qui implique que $U_{a+x} \notin \mathbb{N}^*$, parce que $k = \frac{3^p}{2^q}$, ce qui démontre l'unicité du cycle trivial parce qu'il n'y a que des entiers dans la suite de Syracuse. Pour le cycle trivial $\{4, 1, 4, 1, \cdots\}$, l'étude de la limite permet de corroborer la proposition de démonstration, de vérifier par le calcul la valeur de k et de l'occurrence.

$$U_a = 1 \quad , \quad \frac{(\cdots)}{2^{\cdots}} = \frac{1}{2^2} \quad , \quad k = \frac{3}{2^2}$$

$$k^{n+1} + \frac{1}{2^2}\sum_{i=0}^{n} k^i = 1 \quad , \quad \lim_{n\to\infty}\left(k^{n+1} + \frac{1}{2^2} \cdot \frac{1}{1-k}\right) = 1 \in \mathbb{N}^* \quad , \quad k = \frac{3}{4}$$

3.4 Généralisation par substitution

On peut, si l'on le souhaite, généraliser le calcul de la suite ici, 3 devient 5

$$U_0 \in \mathbb{R}^* \quad U_{n+1} = \begin{cases} \frac{U_n}{2} & \text{si } U_n \text{ est un entier pair} \\ 5U_n + 1 & \text{si } U_n \text{ est un entier impair} \end{cases}$$

Avec comme critère de convergence pour 3U+1 :

$$\frac{3^n}{2^{(n+\frac{2n}{3})}} < 1$$

Tandis que, pour le cas 5U+1, j'ai :

$$\frac{5^n}{2^{(2n+\frac{n}{3})}} < 1$$

Ce qui implique qu'il faut seulement 2/3 de division par 2 en plus, tandis que pour la suite $5x+1$, il en faut plus de 2 fois plus. Ce qui fait que la suite diverge en dehors de quelques cas rares ou très spécifiques, s'ils existent.

3.5 Récurrence

Cette approche permet aussi de raisonner par récurrence. Si je considère un grand entier u_0, chaque fois que la partie entière de la division dans le calcul de u_n sera égale à zéro, je peux repartir de cet entier différent de 1, et ne plus prendre en compte l'ancienne transposition, pour construire une nouvelle séquence, et ainsi de suite jusqu'à ce que la suite soit égale à 1.

$$0 + n_x \cdot \frac{\cdots}{2^{q_0}} = u_0'$$

$$u_0' \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^p \cdot \frac{1}{2^{q_0}} + \left(\frac{3}{2}\right)^{p-1} \cdot \frac{1}{2^{q_1}} + \left(\frac{3}{2}\right)^{p-2} \cdot \frac{1}{2^{q_2}} + ... + \left(\frac{3}{2}\right)^{p-n} \cdot \frac{1}{2^{q_p}} = u_n$$

4 Remerciement

Cette proposition de démonstration n'aurait pas été aussi simple et donc difficilement contestable sans ChatGPT, cette IA m'a permis d'explorer quelques impasses et d'aborder les problèmes de manière à exclure les complexités inutiles. Et cela malgré ces aberrations pour rester politiquement poli avec l'IA.

Références

[1] Shalom Eliahou, « La conjecture de Syracuse : élémentaire, mais redoutable [archive] », sur Pour la Science, 8 avril 2019..

[2] Simon Letherman, Schleicher et Wood, ≪ The (3n + 1)-Problem and Holomorphic Dynamics ≫,Experimental Mathematics, vol. 8, no 3, 1999

[3] David Barina, ≪ Convergence verification of the Collatz problem ≫, The Journal of Supercomputing, vol. 77, no 3, 2020, p. 2681–2688.

[4] Jean-Paul Delahaye et Christian Lasou, ≪ La conjecture de Syracuse [archive] ≫, sur Université de Lille1, 2008-2009..

[5] Terence Tao, ≪ Almost all Collatz orbits attain almost bounded values [archive] ≫, sur What's new, 10 septembre 2019..

[6] (en) Sinyor, J., ≪ The 3x+1 Problem as a String Rewriting System ≫ [archive], International Journal of Mathematics and .

[7] (en) Jeffrey C. Lagarias, ≪ The 3x + 1 problem and its generalizations ≫, Amer. Math. Month., vol. 92, no 1, janvier 1985, p. 3-23 (JSTOR 10.2307/2322189, lire en ligne [archive])..

[8] (fr)Luc-Olivier Pochon, Alain Favr, La suite de Syracuse, un monde de conjectures ,2017. hal- 01593181v1.