Zêta $\zeta(s)$

Rémy Aumeunier
Amateur

06 Mai 2019

La fonction de Riemann est une fonction analytique complexe méromorphe définie, pour tout nombre complexe s tel que $Re(s) > 1$, par la série de Riemann :

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

1 Introduction

Une fois que l'on à lu cela, en dehors du fait que cela fait super sérieux, ben ...eu , ben, quoi. Donc un rapide aperçu de la fonction.Au debut il y a l'identité d'Euler

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod \frac{p^s}{p^s - 1}$$

et deux espaces de définition où l'on peut utiliser $\zeta(s)$ telle quelle, parceque dans la fonction zêta de Riemann s et un imaginaire $s = a + ib$

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{a+ib}}$$

On écrit la puissance avec une exponentielle et l'on utilise formule d'Euler.

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{a+ib}} = \zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^a \cdot n^{ib}} = \zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-a} \cdot e^{ib \cdot ln(n)}$$

formule d'Euler $e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x)$ donc si $x = b \cdot ln(n)$

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-a} \cdot e^{ib \cdot ln(n)} = \sum n^{-a} \cdot (\cos(b \cdot ln(n)) + i\sin(b \cdot ln(n)))$$

Sauf que maintenant ben pas de chance, la fonction diverge pour $-1 < a < 1$ et justement les zéros sont sur la bande $a = \frac{1}{2}$ donc pour calculer les fameux zéro de zêta, il ne faut pas utiliser zêta mais un prolongement de zêta, voir du côté de la fonction gamma d'Euler ou de la fonction êta de Diriclet voir meme voir du côté de la fonction de Môbius Quoi qu'il en soit rien exploitable rapidement ou de prêt a l'emploie perso la plus simple semble etre la fonction de Môbius

Pour ce qui me concerne je me suis interese à zêta pour $s = -1$ donc je suis du côté équation fonctionnel. Une équation fonctionnelle est une équation dont les inconnues sont des fonctions. c'est je genre de truc qui permet de dire

$$\zeta(-1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{-1}} = \sum_{n=1}^{\infty} n = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + ... + \infty = -\frac{1}{12}$$

sous réserve de faire tendre n vers ∞ et donc ne plus avoir le droit de faire une somme (((naturel)))), mais de mon côté je me contenterais de n qui est un nombre premier.

$$(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 - 6)/7$$

$$(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 - 10)/11$$

$$(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12 - 12)/13$$

$$(n! - n) modulo(n + 1) = 0 \quad sss \quad n + 1 = p$$

2 Démonstration

$$(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 - 10) modulo(11) = 0$$

je fais une mise en facteur

$$(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 - 1) \cdot 10) modulo(11) = 0$$

je peux supprimer le therme ici 10 puisque ces obligatoirement un nombre composer donc les facteurs sont déjà présent

$$(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 - 1) modulo(11) = 0$$

je remarque que $11 > n$ avec n premier dans $\prod n$ cela devient

$$(2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9) modulo(11) = 0$$

comme la somme des entier consecutif et egale a

$$\frac{n \cdot (n + 1)}{2}$$

$$(2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9) = \frac{(11 - 2) \cdot (11 - 1))}{2} - 1$$

$$(2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9) = \frac{11^2 - 11 - 2 \cdot 11 + 2}{2} - 1$$

$$(2+3+4+5+6+7+8+9) = \frac{11^2 - 11 - 2\cdot 11}{2} + \frac{2}{2} - 1$$

$$(2+3+4+5+6+7+8+9) modulo(11) = \frac{11^2 - 11 - 2\cdot 11}{2} modulo(11) = 0$$

$$(2+3+4+5+6+7+8+9) modulo(11) = \frac{11^2 - 11}{2} modulo(11) = 0$$

il est n'utile de précis que p est impair et un impaire -1 et divisible par 2 et qu'il me reste un p premier sur les deux donc j'ai bien pour p premier et meme p impaire

$$\zeta = (\sum_{n=2}^{p-2} \frac{1}{n^{-1}}) modulo(p) = 0$$

$$(\sum_{n=2}^{p-2} n) modulo(p) = ((p-1)! - (p-1)) modulo(p+1) = 0$$

$$(2+3+4+5+6+7+8+9) modulo(11) = (1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9\cdot 10 - 10) modulo(11) = 0$$

Que celui qui n'a pas fait le lien avec zêta me jette la première pierre. Maintenant, je ne suis pas convaincu que cela apporte quelque chose dans le débat parceque l'on peu voir n comme un indicateur du nombre de décimal dans la calcul de zêta.

Références

[1] video youtube https://www.youtube.com/watch?v=IghfFlXK$_U$

[2] video youtube https://www.youtube.com/watch?v=vMnkmBCvGQc